

國立新竹教育大學應用數學系

一〇四學年度甄選入學考試

一、填充題：(每格 5 分，共 40 分。)

1. 設 $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ ，則 $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x$ 之值為_____。

2. 已知橢圓方程式為 $9x^2 + y^2 = 1$ ，若點 $P(x, y)$ 為此橢圓上任一點，則

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \text{_____}。$$

3. 從 1 開始，依順序寫出正整數到 2222 得到一個正整數

$$123456789101112 \dots 22212222,$$

這個正整數總共有_____個 0。

4. 方程式 $\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$ 所表示之圖形為拋物線，其對稱軸的方程式為_____。

5. 給一個 2×2 方陣 A 滿足 $3A^2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ，試求出矩陣 A 之行列表值為_____。

6. 請計算下列無窮級數之值。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 - 5n - 6} = \text{_____}。$$

$$(2) \sum_{n=10}^{\infty} \log_{10} \frac{n^2}{n^2 - 1} = \log_{10} M, \text{ 則 } M = \text{_____}。$$

7. $C_1^{100} + 2C_2^{100} + 3C_3^{100} + \dots + 99C_{99}^{100} + 100C_{100}^{100}$ 除以 17 的餘數為_____。

二、計算與證明題：(共 60 分) ※每小題務必寫下詳細的計算與推導過程。

1. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ 。

(i) 請證明： $|1 - \omega| \cdot |1 - \omega^2| \cdot |1 - \omega^3| = \sqrt{7}$ 。(10%)

(ii) 請利用(i) 計算三角函數 $\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{5\pi}{7} \cdot \sin \frac{6\pi}{7}$ 之值。(10%)

2. (i) 請在坐標平面上作出兩函數 $y = f(x) = \log_2 x$ 與 $y = g(x) = -2^{-x}$ 之圖形。

請標出一些坐標並注意圖形的凹凸性。(10%)

(ii) 證明： $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = -x$ 。(10%)

3. 給定平行四邊形 $ABCD$, 其內部有一點 P 滿足 $\angle PAB = \angle PDA = \alpha$, $\angle PBC = \angle PCD = \beta$ 。

請證明：

(i) $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$ 。(10%)

(ii) 平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\frac{(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ 。(10%)